

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--

नं.

Series SHC

Code No. **65/2**
कोड नं.

Please check that this question paper contains 11 printed pages.

Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.

Please check that this question paper contains 26 questions.

Please write down the serial number of the question before attempting it.

कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ 11 हैं।

प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।

कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में 26 प्रश्न हैं।

कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

MATHEMATICS

गणित

Time allowed : 3 hours

दिएत समय : 3 घण्टे

Maximum Marks : 100

अधिकतम अंक : 100

General Instructions :

- (i) The question paper consists of three sections A, B and C. Section A is compulsory for all students. In addition to Section A, every student has to attempt either Section B OR Section C.
- (ii) For Section A
Questions number 1 to 8 are of 3 marks each.
Questions number 9 to 15 are of 4 marks each.
Questions number 16 to 18 are of 6 marks each.
- (iii) For Section B / Section C
Questions number 19 to 22 are of 3 marks each.
Questions number 23 to 25 are of 4 marks each.
Questions number 26 is of 6 marks.
- (iv) All questions are compulsory.
- (v) Internal choices have been provided in some questions. You have to attempt only one of the choices in such questions.
- (vi) Use of calculator is not permitted. However, you may ask for logarithmic and statistical tables, if required.

सामान्य निर्देश :

- (i) इस प्रश्न पत्र के तीन खण्ड अ, ब और स हैं। खण्ड अ सभी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य हैं। खण्ड अ के अलावा प्रत्येक विद्यार्थी को किसी एक खण्ड - ब या स के प्रश्नों के उत्तर देने हैं।
- (ii) **खण्ड अ**
प्रश्न संख्या 1 से 8 तक प्रत्येक के 3 अंक हैं।
प्रश्न संख्या 9 से 15 तक प्रत्येक के 4 अंक हैं।
प्रश्न संख्या 16 से 18 तक प्रत्येक के 6 अंक हैं।
- (iii) **खण्ड ब / खण्ड स**
प्रश्न संख्या 19 से 22 तक प्रत्येक के 3 अंक हैं।
प्रश्न संख्या 23 से 25 तक प्रत्येक के 4 अंक हैं।
प्रश्न संख्या 26, 6 अंक का है।
- (iv) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (v) कुछ प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे प्रश्नों में केवल एक ही विकल्प को करना है।
- (vi) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है। लेकिन यदि आवश्यकता हो तो आप स्रुगणकीय व सांख्यिकीय सारणियों की माँग कर सकते हैं।

SECTION A

खण्ड अ

1. An urn contains 4 red and 7 blue balls. Two balls are drawn at random with replacement. Find the probability of getting

- (i) 2 red balls
(ii) 2 blue balls
(iii) one red and one blue ball.

एक पात्र में 4 लाल तथा 7 नीली गेंदें हैं। पात्र में से दो गेंदें यादृच्छया प्रतिस्थापना सहित निकाली जाती हैं। निम्न के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

- (i) 2 लाल गेंदें
(ii) 2 नीली गेंदें
(iii) एक लाल तथा एक नीली गेंद

2. Two dice are thrown together. What is the probability that the sum of the numbers on the two dice is neither 9 nor 11 ?

दो पाँसे एक साथ फेंके गए। दोनों पाँसों पर आने वाली संख्याओं का योगफल 9 अथवा 11 न आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. Evaluate :

3

$$\int x \log 2x \, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x \log 2x \, dx$$

4. Evaluate :

3

$$\int \cos 2x \cos 4x \, dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \cos 2x \cos 4x \, dx$$

5. Form the differential equation of the family of curves $y = a \cos(x + b)$, where a and b are arbitrary constants.

3

OR

Solve the following differential equation :

$$4 \frac{dy}{dx} + 8y = 5 e^{-3x}$$

यदि कुल $y = a \cos(x + b)$, जहाँ a तथा b स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$4 \frac{dy}{dx} + 8y = 5 e^{-3x}$$

6. Solve the following differential equation :

3

$$\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$$

7. Using the properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-\alpha \\ x-2 & x-3 & x-\beta \\ x-1 & x-2 & x-\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

where α , β and γ are in A.P.

3

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x-3 & x-4 & x-\alpha \\ x-2 & x-3 & x-\beta \\ x-1 & x-2 & x-\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

जहाँ α , β तथा γ समान्तर श्रेणी में हैं।

8. If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 5A + 7I = 0$. Hence find A^{-1} .

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है, तो दिखाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$. अतः A^{-1} ज्ञात कीजिए।

9. Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^2 - 4x + 3$ on $[1, 3]$.

फलन $f(x) = x^2 - 4x + 3$ के लिए रोले के प्रमेय की $[1, 3]$ पर सत्यता की जाँच कीजिए।

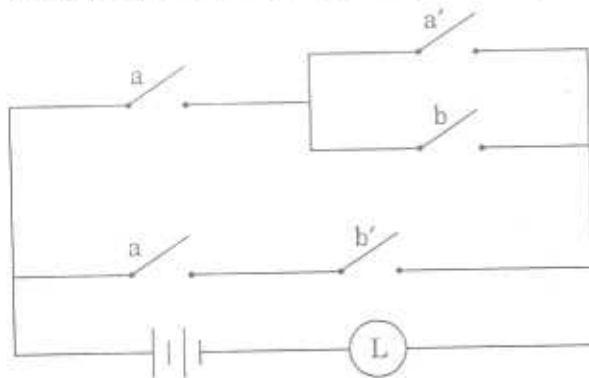
10. If $y = A e^{mx} + B e^{nx}$, prove that

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n) \frac{dy}{dx} + mn y = 0.$$

यदि $y = A e^{mx} + B e^{nx}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n) \frac{dy}{dx} + mn y = 0.$$

11. Find the Boolean expression representing the following circuit :



Also, simplify the Boolean expression.

OR

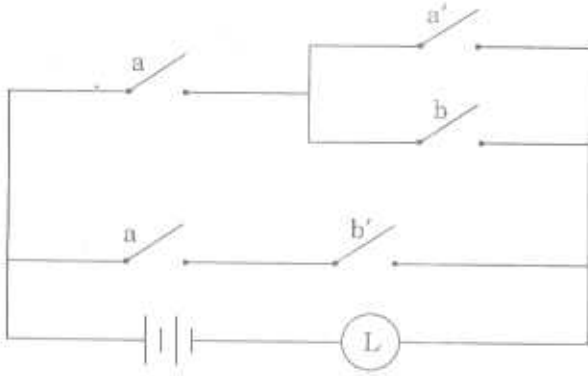
Examine the validity of the following argument :

$$S_1 : p \rightarrow q$$

$$S_2 : \sim q$$

$$S : \sim p$$

निम्न परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक (Boolean expression) ज्ञात कीजिए :



बूलीय व्यंजक को सरल भी कीजिए ।

अथवा

निम्न युक्ति की वैधता का परीक्षण कीजिए :

$$S_1 : p \rightarrow q$$

$$S_2 : \sim q$$

$$S : \sim p$$

10. Find the derivative of $\sin(3x + 2)$ w.r.t. x from first principle.

4

$\sin(3x + 2)$ का x के सापेक्ष आदितः अवकलन कीजिए ।

11. If $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & \text{when } x \neq 5 \\ k, & \text{when } x = 5 \end{cases}$ is continuous at $x = 5$, find the value of k .

4

OR

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

परि $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & \text{जब } x \neq 5 \\ k, & \text{जब } x = 5 \end{cases}$

$x = 5$ पर सतत है, तो k का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

14. Using properties of definite integrals, evaluate

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$$

निश्चित समाकलों के गुणधर्मों का प्रयोग करके

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

15. Evaluate :

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} dx$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} dx$$

16. Find the area of the circle $x^2 + y^2 = 16$ which is exterior to the parabola $y^2 = 6x$, by using integration.

OR

Evaluate $\int_0^3 (2x^2 + 3x + 5) dx$ as limit of a sum.

समाकलों का प्रयोग करके वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y^2 = 6x$ से बाहर है ।

अथवा

योगों की गुच्छ मान विधि द्वारा $\int_0^3 (2x^2 + 3x + 5) dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

17. Find the point on the curve $x^2 = 4y$ which is nearest to the point $(-1, 2)$.

OR

A wire of length 28 m is to be cut into two pieces. One of the two pieces is to be made into a square and the other into a circle. What should be the length of the two pieces so that the combined area of these is minimum ?

वक्र $x^2 = 4y$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-1, 2)$ से न्यूनतम दूरी पर हो ।

अथवा

28 मी. लम्बी एक तार को दो भागों में काटना है । एक भाग को मोड़कर एक वर्ग बनाना है तथा दूसरे को मोड़कर एक वृत्त बनाना है । दोनों टुकड़ों की लम्बाइयाँ क्या होनी चाहिएँ कि उनसे बनी आकृतियों का संयुक्त क्षेत्रफल न्यूनतम हो ?

18. Using matrices, solve the following system of equations :

6

$$4x - 5y - 11z = 12$$

$$x - 3y + z = 1$$

$$2x + 3y - 7z = 2$$

आव्यूहों का प्रयोग करके, निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$4x - 5y - 11z = 12$$

$$x - 3y + z = 1$$

$$2x + 3y - 7z = 2$$

SECTION B

खण्ड ब

19. Find the resultant of two velocities 12 m/sec and 20 m/sec inclined to one another at an angle of 60° .

3

OR

A particle is projected with a velocity of 49 m/sec at an elevation of 30° . Find

- the time of flight.
- the greatest height.

12 मी./से. तथा 20 मी./से. के दो वेग, जो एक-दूसरे से 60° के कोण पर कार्यरत हैं, के परिणामी का मान ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक कण, 49 मी./से. के वेग से 30° के कोण पर प्रक्षिप्त किया गया । ज्ञात कीजिए :

- उड़ान का समय
- अधिकतम ऊँचाई

20. A particle starting with initial velocity of 30 m/sec moves with a uniform acceleration of 8 m/sec^2 . Find

- the velocity of the particle after 7 seconds.
- how far it will go in 6 seconds.
- its velocity when it has traversed 100 m.

3

एक कण प्रारम्भिक वेग 30 मी./से. तथा एकसमान त्वरण 8 मी./से.^2 से चलना प्रारम्भ करता है । निम्न ज्ञात कीजिए :

- 7 सेकण्ड बाद कण का वेग
- 6 सेकण्ड में कण कितनी दूरी तय करेगा
- 100 मी. दूरी तय करने पर उसका वेग

21. Find the value of λ which makes the vectors \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} coplanar where

$$\vec{a} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}, \quad \vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{and} \quad \vec{c} = -8\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}.$$

λ का मान ज्ञात कीजिए जो सदिशों \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} को समतलीय बनाए जहाँ

$$\vec{a} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}, \quad \vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{तथा} \quad \vec{c} = -8\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}.$$

22. Find the projection of $\vec{b} + \vec{c}$ on \vec{a} where $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and

$$\vec{c} = \hat{i} + \hat{k}.$$

सदिश $\vec{b} + \vec{c}$ का \vec{a} पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + \hat{k}$.

23. Two forces acting at a point are such that if the direction of one is reversed, the resultant is turned through an angle of 90° . Show that the two forces must be equal in magnitude.

एक बिन्दु पर कार्यरत दो बल ऐसे हैं कि यदि उनमें से एक की दिशा विपरीत कर दी जाए, तो परिणामी बल एक समकोण (90°) घूम जाता है। दर्शाइए कि दोनों बल परिमाण में समान हैं।

24. Find the equation of the plane passing through the intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 7, \quad \vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9 \quad \text{and the point } (2, 1, 3).$$

उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो तलों $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 7$,

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ के प्रतिच्छेदन से तथा बिन्दु $(2, 1, 3)$ से होकर जाता है।

25. A weight of 5 kg is suspended by two strings of lengths 16 cm and 63 cm fastened to two points on the same horizontal line 65 cm apart. Find the tensions in the two strings.

5 किग्रा भार का एक पिंड, 16 सेमी तथा 63 सेमी लम्बी दो रस्सियों से दो बिन्दुओं, जो एक ही क्षैतिज रेखा में 65 सेमी की दूरी पर स्थित हैं, से बंधा है। दोनों रस्सियों में तनाव ज्ञात कीजिए।

26. Find the equation of the sphere passing through the points $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ and $(0, 0, c)$.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ से होकर जाता है।

SECTION C

खण्ड स

19. Find the mean μ and variance σ^2 for the following probability distribution :

3

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

OR

Determine the binomial distribution whose mean is 20 and variance 16.

निम्न प्रायिकता बंटन के लिए माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 ज्ञात कीजिए :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

अथवा

वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 20 है तथा प्रसरण 16 है ।

20. There are two bags I and II. Bag I contains 2 white and 4 red balls and Bag II contains 5 white and 3 red balls. One ball is drawn at random from one of the bags and is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag II.

3

दो थैले I तथा II हैं । थैले I में 2 सफेद तथा 4 लाल गेंदें हैं और थैले II में 5 सफेद तथा 3 लाल गेंदें हैं । किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई जिसे लाल रंग का पाया गया । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद थैले II में से थी ।

21. A bill of Rs. 1,000 drawn on May 7 for 6 months was discounted on August 29 following, for a cash payment of Rs. 988. Find the rate of interest charged by the bank.

3

1,000 रु. का एक बिल, जो 7 मई को 6 महीने के लिए लिखा गया, आगामी 29 अगस्त को 988 रु. के नकद भुगतान पर भुना लिया गया । बैंक द्वारा ली गई ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ।

22. Calculate the banker's gain on a bill of Rs. 36,000 due in 4 months at 6% per annum.

3

36,000 रु. के बिल पर, जो 4 महीने में देय है तथा जिस पर ब्याज 6% वार्षिक की दर से है, बैंक का लाभ ज्ञात कीजिए ।

23. Find the present value of an annuity due of Rs. 800 per annum payable at the beginning of each year for 2 years allowing interest 6% per annum, compounded annually.
[Take $(1.06)^{-1} = 0.943$]

2 वर्षों के लिए 800 रु. प्रति वर्ष भुगतान वाली देय वार्षिकी जो प्रति वर्ष के आरम्भ में दी जाती है का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से वार्षिक संयोजित होता है।
[$(1.06)^{-1} = 0.943$ लीजिए]

24. Given the total cost function is $C(x) = 1500 + 30x + x^2$. Find

- the average cost function.
- the average cost of output of 20 units.
- the marginal cost function.
- the marginal cost when 20 units are produced.

दिया गया है कुल लागत फलन $C(x) = 1500 + 30x + x^2$. ज्ञात कीजिए :

- औसत लागत फलन
- 20 इकाइयों के उत्पादन के लिए औसत लागत
- सीमांत लागत फलन
- सीमांत लागत जब 20 इकाइयाँ उत्पादित की जाती हैं

25. A, B and C formed a partnership and contributed Rs. 5,00,000, Rs. 4,00,000 and Rs. 3,00,000 respectively. After 5 months A invested additional Rs. 1,00,000 and C invested Rs. 2,00,000 additional. If the profit for the year was Rs. 8,25,000, what amount should each partner receive, assuming that the profit is distributed in the ratio of their investments ?

A, B तथा C ने साझे में व्यापार आरम्भ किया तथा क्रमशः 5,00,000 रु., 4,00,000 रु. तथा 3,00,000 रु. लगाये। 5 माह बाद A ने 1,00,000 रु. और निवेश किये तथा C ने 2,00,000 रु. और निवेश किये। 8,25,000 रु. के वार्षिक लाभ में प्रत्येक का भाग ज्ञात कीजिए यदि यह मान लिया जाए कि लाभ निवेश के अनुपात में बाँटा जाता है।

26. A dealer wishes to purchase a number of fans and radios. He has only Rs. 5,760 to invest and has a space for at most 20 items. A fan costs him Rs. 360 and a radio Rs. 240. His expectation is that he can sell a fan at a profit of Rs. 22 and a radio at a profit of Rs. 18. Assuming that he can sell all the items he buys, how should he invest his money for maximum profit ? Translate the problem as LPP and solve it graphically. 6

एक व्यापारी कुछ पंखे तथा रेडियो खरीदना चाहता है । निवेश के लिए उसके पास 5,760 रु. हैं तथा अधिकतम 20 मात्रकों को रखने के लिए स्थान है । एक पंखे तथा एक रेडियो का मूल्य क्रमशः 360 रु. तथा 240 रु. है । उसे आशा है कि वह एक पंखा 22 रु. तथा एक रेडियो 18 रु. के लाभ पर बेच सकता है । यह मानते हुए कि उसकी सभी मर्दे बिक जाएँगी, जिन्हें वह खरीदता है, बताइए कि वह अधिकतम लाभ के लिए धन का निवेश किस प्रकार करे । उपरोक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।